ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2005, том 403, № 1, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518

ВЕСОВАЯ ТЕОРЕМА СОБОЛЕВА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И СФЕРИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

© 2005 г. Б. Г. Вакулов, С. Г. Самко

Представлено академиком С.М. Никольским 03.06.2004 г.

Поступило 20.12.2004 г.

Рассматривается потенциал Рисса

$$I^{\alpha} f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n, \tag{1}$$

в обобщенных весовых пространствах Лебега $L^{p(\cdot)}$ $(\mathbf{R}^n)$ с переменным показателем $p(x)$, а также его сферический аналог

$$(K^{\alpha} f)(x) = \int\limits_{S_n} \frac{f(\sigma)}{|x-\sigma|^{n-\alpha}} d\sigma, \quad x \in S_n, \tag{2}$$

в соответствующих пространствах на единичной сфере S^n в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Для пространственного потенциала известна справедливость $p \to q$ теоремы Харди–Литлвуда–Соболева в пространствах Лебега с переменным показателем, а также ее весового варианта в случае ограниченных областей в $\mathbf{R}^n$ (см. ниже теорему 1). Для неограниченных областей справедливость такой теоремы в естественной постановке остается открытой.

Имеются два результата, относящиеся к случаю всего пространства $\mathbf{R}^n$: в [1] теорема Соболева доказана в предположении, что $p(x) \equiv \mathrm{const}$ на бесконечности (вне какого-нибудь шара); другой вариант теоремы Соболева для $\mathbf{R}^n$ был получен в [2, 3] в случае произвольного поведения показателя $p(x)$, имеющего предел $p(x)$, но с некоторым "лишним" степенным весом на бесконечности и в предположении, что $p(x)$ принимает наименьшее значение на бесконечности.

Основные результаты настоящей работы даны в теоремах 2 и 3. Теорема 2 дает $p(\cdot) \to q(\cdot)$-оценку со степенным весом, привязанным к началу координат и бесконечности, при естественном интервале для показателей веса, при этом границы этого интервала определяются лишь значениями $p(\cdot)$ в точках, к которым привязан вес, но показатели веса должны быть связаны друг с другом некоторым линейным соотношением. Теорема 3 относится к сферическому потенциалу и получается из теоремы 2 с помощью стереографической проекции.

1°. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Через $L^{p(\cdot)}$ $(\mathbf{R}^n, \rho)$ обозначаем весовое пространство функций $f(x)$ на $\mathbf{R}^n$ таких, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \rho(x)|f(x)|^{p(x)} dx < \infty,$$

где ρ – весовая функция, привязанная к началу координат и бесконечности:

$$\rho(x) = \rho_{\gamma_0, \gamma_\infty}(x) = |x|^{\gamma_0}(1+|x|)^{\gamma_\infty - \gamma_0},$$

а $p(x)$ – измеримая функция на $\mathbf{R}^n$ со значениями в $[1, \infty)$. Это банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\rho)} = \inf\left\{\lambda > 0 \colon \int\limits_{\mathbf{R}^n} \rho(x)\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \le 1\right\}$$

в предположении, что $1 \le p(x) \le P < \infty$, $x \in \mathbf{R}^n$ (см., например, [4] в невесовом случае). Относительно $p(x)$ предполагаются выполненными следующие условия:

$$1 < p_0 \le p(x) \le P < \frac{n}{\alpha}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{A}{\ln \frac{1}{|x-y|}}, \quad |x-y| \le \frac{1}{2}, \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

Ростовский университет, Ростов-на-Дону
Universidade do Algarve, Portugal

и аналогичное условие на бесконечности, т.е.

$$|p_*(x)-p_*(y)| \le \frac{A_\infty}{\ln\frac{1}{|x-y|}}, \quad |x-y| \le \frac{1}{2}, \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \tag{3}$$

где $p_*(x) = p\frac{1}{x}$.

2°. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $q(x)$ – предельный соболевский показатель $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha}{n}$. Поскольку $\max p(x) < \frac{n}{\alpha}$, то $q(x)$ также удовлетворяет условиям (1)–(3) и условию $1 < \min q(x) \le \max q(x) < \infty$. Весовая $p(\cdot) \to q(\cdot)$-оценка для оператора I^α по ограниченной области доказана в [5]. Именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $x_0 \in \overline{\Omega}$ и $p(x)$ удовлетворяет условиям* (1), (2) *в Ω. Тогда*

$$\|I^{\alpha(\cdot)} f\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega, |x-x_0|^\mu)} \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega, |x-x_0|^\gamma)},$$

где

$$\alpha(x_0)p(x_0) - n < \gamma > n[p(x_0)-1] \;\; и \;\; \mu = \frac{q(x_0)}{p(x_0)}\gamma.$$

Лемма 1. *Пусть $x, y \in \mathbf{R}^n$ и $x_* = \frac{x}{|x|^2}$. Тогда*

$$|x_* - y_*| = \frac{|x-y|}{|x|\cdot|y|}, \quad |x_* - x| = \frac{|1-|x|^2|}{|x|},$$

$$|x_* - y|^2 = \frac{|x-y|^2 + (1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x|^2},$$

и $|x_* - y| \ge \frac{|x-y|}{|x|}$ *для* $|x| \le 1$, $|y| \le 1$.

Лемма 2. *Пусть p удовлетворяет условию* (2). *Тогда в сферическом слое $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$ справедливо неравенство $|p(x_*) - p(x)| \le \frac{C}{\ln\frac{6}{|1-|x|^2|}}$, где $C > 0$ не зависит от x.*

3°. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 2. *В предположениях* (1)–(3) *оператор I^α ограничен из пространства $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n, \rho_{\gamma_0, \gamma_\infty})$ в пространство $L^{q(\cdot)}(\mathbf{R}^n, \rho_{\mu_0, \mu_\infty})$, где*

$$\mu_0 = \frac{q(0)}{p(0)}\gamma_0, \quad \mu_\infty = \frac{q(\infty)}{p(\infty)}\gamma_\infty,$$

если

$$\alpha p(0) - n < \gamma_0 < n[p(0)-1],$$
$$\alpha p(\infty) - n < \gamma_\infty < n[p(\infty)-1],$$

и показатели γ_0 и γ_∞ связаны друг с другом соотношением

$$\frac{q(0)}{p(0)}\gamma_0 + \frac{q(\infty)}{p(\infty)}\gamma_\infty = \frac{q(\infty)}{p(\infty)}[(n+\alpha)p(\infty) - 2n]. \tag{4}$$

4°. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Обозначим

$$A^p_{\mu_0, \mu_\infty}(f) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |x|^{\mu_0}(1+|x|)^{\mu_\infty - \mu_0}|f(x)|^{p(x)}dx.$$

Нужно показать, что $A^q_{\mu_0, \mu_\infty}(I^\alpha\varphi) \le c < \infty$ для всех φ таких, что $A^p_{\gamma_0, \gamma_\infty}(\varphi) \le 1$, где $c > 0$ не зависит от φ.

Пусть $B_+ = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| < 1\}$ и $B_- = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| > 1\}$. Так как $q(x)$ – ограниченная функция, то достаточно оценить величины

$$A_{++} = \int\limits_{B_+} |x|^{\mu_0}\left|\int\limits_{B_+} \frac{\varphi(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}\right|^{q(x)} dx,$$

$$A_{+-} = \int\limits_{B_+} |x|^{\mu_0}\left|\int\limits_{B_-} \frac{\varphi(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}\right|^{q(x)} dx,$$

$$A_{-+} = \int\limits_{B_-} |x|^{\mu_\infty}\left|\int\limits_{B_+} \frac{\varphi(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}\right|^{q(x)} dx,$$

$$A_{--} = \int\limits_{B_-} |x|^{\mu_\infty}\left|\int\limits_{B_-} \frac{\varphi(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}\right|^{q(x)} dx.$$

Отметим, что условие (4) используется только при оценке членов A_{+-} и A_{-+}.

Оценка для A_{++}. Достаточно применить теорему 1.

Оценка для A_{--}. Оценка сводится к оценке для A_{++} через одновременную замену переменных: $x = \frac{u}{|u|^2}$, $dx = \frac{du}{|u|^{2n}}$, $y = \frac{v}{|v|^2}$, $dy = \frac{dv}{|v|^{2n}}$, так что

$$A_{--} = \int\limits_{B_+} |x|^{-\mu_\infty - 2n}\left|\int\limits_{B_+} \frac{\varphi(y_*)dy}{|y|^{2n}|x_* - y_*|^{n-\alpha}}\right|^{q_*(x)} dx,$$

где $q_*(x) = q(x_*) = q\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$. В силу леммы 1 получаем

$$A_{--} = \int_{B_+} |x|^{-\mu_\infty - 2n}\left||x|^{(n-\alpha)q_*(x)}\int_{B_+}\frac{|y|^{-n-\alpha}\varphi(y_*)\mathrm{d}y}{|x-y|^{n-\alpha}}\right|^{q_*(x)} dx.$$

Отсюда

$$A_{--} \le \int_{B_+}|x|^{\mu_1}\left|\int_{B_+}\frac{\psi(y)\mathrm{d}y}{|x-y|^{n-\alpha}}\right|^{q_*(x)} dx,$$

где $\mu_1 = (n-\alpha)q(\infty) - 2n - \mu_\infty$ и $\psi(y) = |y|^{-n-\alpha}\varphi\left(\frac{y}{|y|^2}\right)$. Легко видеть, что

$$\int_{B_+}|x|^{\gamma_1}|\psi(x)|^{p_*(x)}dx = \int_{B_-}|x|^{\gamma_\infty}|\varphi(x)|^{p(x)}dx < \infty$$

при выборе $\gamma_1 = (n+\alpha)p(\infty) - 2n - \gamma_\infty$ и что $\alpha p_*(0) - n < \gamma_1 < n[p_*(0) - 1]$ и $\mu_1 = \frac{q_*(0)}{p_*(0)}\gamma_1$. Поэтому применима теорема 1.

Оценка для A_{-+}. После замены переменной $x \to x_*$ получаем

$$A_{-+} = \int_{B_+}|x|^{-\mu_\infty - 2n}\left|\int_{B_+}\frac{\varphi(y)dy}{|x_* - y|^{n-\alpha}}\right|^{q_*(x)} dx \le$$

$$\le \int_{B_+}|x|^{\mu_1}|h(x)|^{q_*(x)}dx,$$

где $h(x) = \int_{B_+}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}y}{(|x|\cdot|x_* - y|^{n-\alpha})}$. Заметим, что $|x|\cdot|x_* - y| \ge |x-y|$ и $|x|\cdot|x_* - y| \ge 1 - |x|$. Пусть $E_1 = \{x \in B_+: q_*(x) \le q(x)\}$ и $E_2 = \{x \in B_+: q_*(x) \ge q(x)\}$. Оценка интеграла A_{-+} по $x \in E_1$ легка ввиду прямой возможности перейти от показателя $q_*(x)$ к показателю $q(x)$. При интегрировании по E_2 достаточно рассмотреть случай, когда $|x| \ge \frac{1}{2}$, так как $|x|\cdot|x_* - y| \ge \frac{1}{2}$ при $|x| \le \frac{1}{2}$. В оставшемся случае имеем $\sup\limits_{x\in E_2, |x|\ge\frac{1}{2}} |h(x)|^{q_*(x) - q(x)} < \infty$, поскольку и тогда $|h(x)| \le (1-|x|)^{\alpha - n}\int_{B_+}|\varphi(t)| = c(1-|x|)^{\alpha-n}$ и, следовательно,

$$|h(x)|^{q_*(x) - q(x)} \le e^{(\alpha - n)[q_*(x) - q(x)]\ln(1-|x|)} \le c < \infty.$$

Поэтому

$$A_{-+} \le c\int_{B_+}|x|^{\mu_1}\left(\int_{B_+}\frac{|\varphi(y)|\mathrm{d}y}{(|x|\cdot|x_* - y|)^{n-\alpha}}\right)^{q(x)} dx \le$$

$$\le c\int_{B_+}|x|^{\mu_1}\left(\int_{B_+}\frac{|\varphi(y)|\mathrm{d}y}{(|x-y|)^{n-\alpha}}\right)^{q(x)} dx,$$

что дает возможность применить теорему 1, для чего, однако, требуется, чтобы $\mu_1 \ge \mu_0 = \frac{q(0)}{p(0)}\gamma_1$, т.е. $\mu_0 + \mu_\infty \le (n-\alpha)q(\infty) - 2n$ или

$$\frac{q(0)}{p(0)}\gamma_0 + \frac{q(\infty)}{p(\infty)}\gamma_\infty \le \frac{q(\infty)}{p(\infty)}[(n+\alpha)p(\infty) - 2n]. \quad (5)$$

Применение теоремы 1 завершает получение оценки для A_{-+}.

Оценка для A_{+-}. Получение этой оценки симметрично, отметим лишь, что после преобразования

$$A_{+-} = \int_{B_+}|x|^{\mu_0}\left|\int_{B_+}\frac{\psi(y)dy}{(|y|\cdot|x - y_*|)^{n-\alpha}}\right|^{q(x)} dx,$$

где $\psi(y) = |y|^{-n-\varphi}(y_*) \in L^{p_*(\cdot)}(B_+, |x|^{\gamma_1})$ та же функция, что и выше, мы теперь должны перейти от показателя $q(x)$ к показателю $q_*(x) = \frac{np_*(x)}{n - \alpha p_*(x)}$. Это делается симметрично предыдущему случаю с различением случаев $q(x) \le q_*(x)$ и $q(x) \ge q_*(x)$. При применении теоремы 1 необходимо, чтобы $\mu_0 \le \frac{q_*(0)}{p_*(0)}\gamma_1 = \frac{q(\infty)}{p(\infty)}\gamma_1$, что дает неравенство для показателей, обратное к (5), а именно

$$\frac{q(0)}{p(0)}\gamma_0 + \frac{q(\infty)}{p(\infty)}\gamma_\infty \ge \frac{q(\infty)}{p(\infty)}[(n+\alpha)p(\infty) - 2n],$$

и вместе с (5) приводит к условию (4).

Следствие. *Пусть* $0 < \alpha < n$, $p(x)$ *удовлетворяет условиям* (1)–(3) *и пусть* $p(\infty) = \frac{2n}{n+\alpha}$. *Оператор* I^α *ограничен из пространства* $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ *в пространство* $L^{q(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$, $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha}{n}$.

5°. ТЕОРЕМА О $p(\cdot) \to q(\cdot)$ ОЦЕНКЕ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Стереографическая проекция $\xi = s(x) = \{s_1(x), s_2(x), \ldots, s_{n+1}(x)\}$ пространства $\mathbf{R}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1}: x_{n+1} = 0\}$ на сферу $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ дается формулами [6, *p*. 35]

$$s_k(x) = \frac{2x_k}{1+|x|^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$s_{n+1}(x) = \frac{|x|^2-1}{|x|^2-1},$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2}$. Формулы

$$|x| = \frac{|\xi + e_{n+1}|}{|\xi - e_{n+1}|}, \quad \sqrt{1+|x|^2} = \frac{2}{|\xi - e_{n+1}|},$$

$$|x-y| = \frac{2|\sigma - \xi|}{|\sigma - e_{n+1}| \cdot |\xi + e_{n+1}|}, \quad dy = \frac{2^n d\sigma}{|\sigma - e_{n+1}|^{2n}},$$

$$|\xi - \sigma| = \frac{2|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, \quad d\sigma = \frac{2^n dy}{(1+|y|^2)^n},$$

$$|\xi - e_{n+1}| = \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}}, \quad |\xi + e_{n+1}| = \frac{2|x|}{\sqrt{1+|x|^2}},$$

где $\xi = s(x)$ и $\sigma = s(y)$, $x, y \in \mathbf{R}^{n+1}$ и $e_{n+1} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, дают связь между пространственным и сферическим потенциалами:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\varphi(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}} = 2^\alpha \int\limits_{S_n} \frac{\varphi_*(\sigma)d\sigma}{|\xi - \sigma|^{n-\alpha}},$$

где $\varphi_*(\sigma) = \dfrac{\varphi[s^{-1}(\sigma)]}{[\sigma - e_{n+1}]^{n+\alpha}}$, и соответствующими пространствами:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |y|^{\gamma_0} \cdot (1+|y|)^{\gamma_\infty - \gamma_0} |\varphi(y)|^{p(y)} \sim$$

$$\sim \int\limits_{S^n} |\sigma - e_{n+1}|^{\beta_+} \cdot |\sigma + e_{n+1}|^{\beta_-} |\varphi_*(\sigma)|^{\tilde{p}(\sigma)} d\sigma,$$

где $\beta_+ = -\gamma_\infty + (n+\alpha)p(\infty) - 2n$, $\beta_- = \gamma_0$.

Лемма 3. *Пространственный показатель $p(x)$ удовлетворяет локальному логарифмическому условию и логарифмическому условию на бесконечности тогда и только тогда, когда $\tilde{p}(\sigma) = p[s^{-1}(\sigma)]$ удовлетворяет логарифмическому условию на сфере.*

Пусть теперь $p = p(\sigma)$ – заданная на сфере S^n функция, удовлетворяющая условиям $1 < p_0 \le p(\sigma) \le \le P < \dfrac{n}{\alpha}$, $\sigma \in S^n$, $|p(\sigma_1) - p(\sigma_2)| \le \dfrac{A}{\ln\dfrac{3}{|\sigma_1 - \sigma_2|}}$, $\sigma_1 \in S^n$, $\sigma_2 \in S^n$.

Теорема 3. *Сферический оператор типа потенциала* (2) *ограничен из пространства*

$$\left\{\varphi\colon \int\limits_{S^n} |\sigma - a|^{\beta_a} \cdot |\sigma - b|^{\beta_b} |\varphi(\sigma)|^{p(\sigma)} d\sigma < \infty\right\},$$

где a и b – произвольные точки на сфере S^n, в пространство

$$\left\{f\colon \int\limits_{S^n} |\sigma - a|^{\nu_a} \cdot |\sigma - b|^{\nu_b} |f(\sigma)|^{q(\sigma)} d\sigma < \infty\right\},$$

$$\frac{1}{q(\sigma)} = \frac{1}{p(\sigma)} - \frac{\alpha}{n},$$

где $\alpha p(a) - n < \beta_a < np(a) - n$, $\alpha p(b) - n < \beta_b < np(b) - n$, $\nu_a = \dfrac{q(a)}{p(a)}\beta_a$, $\nu_b = \dfrac{q(b)}{p(b)}\beta_b$ *и* $\dfrac{q(a)}{p(a)}\beta_a = \dfrac{q(b)}{p(b)}\beta_b$.

Замечание. Допускается невесовой случай $\beta_a = \beta_b = \nu_a = \nu_b = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Diening L.* // Math. Nachr. 2004. № 268. P. 31–43.
2. *Kokilaasvili V.M., Samko S.G.* // Ztschr. Anal. Anwend. 2003. V. 2. № 4. P. 421–440.
3. *Kokilaasvili V.M., Samko S.G.* On Sobolev Theorem for Riesz-type Potentials in the Lebesgue Spaces with Variable Exponent. Prepr. Inst. Superior Tecnico. Lisbon: Depart. Mat.(03), 2003. P. 1–14.
4. *Kovacik O., Rakosnik J.* // Czechoslovak Math. J. 1991. V. 116. № 41. P. 592–618.
5. *Samko S.G.* // Frac. Calc. and Appl. Anal. 2003. V. 69. № 4. P. 421–440.
6. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.